

© 2024 г. П.С. ЩЕРБАКОВ, д-р физ.-мат. наук (cavour118@mail.ru),  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;  
Московский физико-технический институт, Долгопрудный)

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТА ВСПЛЕСКА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ<sup>1</sup>

Рассматривается класс хорошо известных из литературы трехчленных линейных разностных уравнений высокого порядка и исследуется неасимптотическое поведение их решений при ненулевых начальных условиях из единичного куба. Показано, что для некоторых подмножеств коэффициентов из области устойчивости всегда найдутся начальные условия, приводящие к *всплеску* – большому отклонению решений от положения равновесия, и что эти отклонения могут быть сколь угодно велики. Исследованы разнообразные частные случаи, приводятся примеры.

*Ключевые слова:* трехчленное разностное уравнение, устойчивость, ненулевые начальные условия, всплеск решений.

DOI: 10.31857/S0005231024060047, EDN: XXDFHU

### 1. Введение

Сравнительно недавно в литературе наблюдается интерес к изучению и пониманию явления *всплеска решений* устойчивых дифференциальных или разностных уравнений, вызванного наличием ненулевых начальных условий при отсутствии внешних возмущений. Под всплеском понимается большие отклонения решений от положения равновесия на конечных интервалах времени. Важность таких исследований объясняется многими причинами. Очевидно, что такое поведение крайне нежелательно в инженерной практике [1, 2] и может привести к нештатной работе или поломке цифровых систем управления. Далее, если при исследовании нелинейной системы в окрестности точки равновесия используется ее линеаризованная модель, то вследствие больших отклонений траектория может выйти из области притяжения нелинейной системы, и модель потеряет адекватность. Наконец, некоторые современные мощные методы оптимизации могут выказывать немонотонную сходимостью, затрудняющую их анализ, и это явление требует объяснения; из самых свежих публикаций на эту тему отметим [3].

Около десяти лет назад этим направлением исследований живо заинтересовался Борис Теодорович Поляк, и с тех пор им было написано много

---

<sup>1</sup> Результаты исследований, представленные в разделах 3.2.2–3.2.6, получены за счет средств Российского научного фонда (проект № 21-71-30005, <https://rscf.ru/project/21-71-30005/>).

Автор признателен В.Н. Честнову и Д.В. Шатову за ценные указания по улучшению качества представления материала.

статей по данной тематике; из наиболее значимых работ приведем [3–8], которые посвящены изучению всплеска как в непрерывном времени (дифференциальные уравнения), так и в дискретном (разностные уравнения). Этим интересом Борис Теодорович заразил многих своих учеников, в том числе и автора настоящей статьи, в которой исследуется эффект всплеска решений одного класса разностных уравнений.

В то время как случай *непрерывного времени* до определенной степени изучен в литературе (например, см. [5] с обширной библиографией, включающей ключевую работу [9]), *разностным уравнениям* уделено очень мало внимания. В литературе имеется немного разрозненных результатов, относящихся к многомерным дискретным системам и численному построению верхних оценок отклонений их решений [10, 11]; к адаптивному управлению [12]; к изучению зависимости величины всплеска от степени управляемости системы [13]. Однако насколько известно автору, простейшая и естественная постановка задачи – оценивание всплеска решений скалярных разностных уравнений – почти не исследовалась. Вероятно, первая серьезная попытка в этом направлении была предпринята в [6], где были получены точные значения или нижние оценки величины всплеска для классов расположения корней характеристического полинома уравнения и различных начальных условий и рассмотрено поведение решений также и при ненулевом детерминированном внешнем возмущении. Использувавшиеся теория и методы разностных уравнений изложены в [14].

Отметим еще одно интересное направление исследований – развитие вероятностного подхода к оценке всплеска, в рамках которого коэффициенты и/или начальные условия устойчивого разностного уравнения предполагаются случайными, и делается попытка оценить вероятность наличия всплеска, величину его математического ожидания и т.д.; см. [8, 15].

В данной работе изучается явление всплеска применительно к трехчленному уравнению, характерному для задач популяционной динамики при использовании линеаризованных моделей. Первой примечательной статьей, изучавшей это уравнения, является [16] (на сегодняшний день эта работа имеет 267 цитирований в библиографической базе данных Google Scholar), где были получены необходимые и достаточные условия его асимптотической устойчивости в терминах коэффициентов уравнения; а именно, было дано явное описание области устойчивости на плоскости двух его коэффициентов.

Позже эти результаты были обобщены в сторону наличия нескольких запаздываний [17, 18], комплекснозначных коэффициентов [19], векторных уравнений [20, 21], нахождения альтернативных доказательств формы области устойчивости [18], приложений к непрерывным системам с запаздываниями [22] и др.; также отметим [14], где приведены поучительные обсуждения.

Удобной чертой решения изучаемого уравнения является то, что, имея всего три ненулевых члена, оно выказывает большое разнообразие типов поведения при различных начальных условиях и значениях двух варьируемых

коэффициентов. Кроме того, наличие всего двух коэффициентов облегчает анализ поведения решений именно в терминах коэффициентов, а не корней.

Первые результаты по изучению эффектов всплеска в этом уравнении были получены в [6]; здесь эта линия исследований продолжена и предприняты попытки получить точные аналитические выражения для величины всплеска или ее нижние оценки. В ряде специальных случаев показано, что всплеск неизбежен, а его величина (равно как и момент) могут принимать сколь угодно большие значения.

В статье приняты стандартные обозначения:  $\mathbb{R}^n$  – поле вещественных чисел; значок  $\gg$  означает «много больше»; символ  $\approx$  означает «приблизительно равно»; символ  $:=$  соответствует «обозначим через»; символы  $\lfloor \cdot \rfloor$  и  $\lceil \cdot \rceil$  означают округление до ближайшего целого вниз и вверх соответственно;  $|\cdot|$  – абсолютная величина числа;  $\lambda_i$  –  $i$ -й корень уравнения;  $e$  – основание натурального логарифма; для целых  $s \geq t$  биномиальный коэффициент обозначается через  $C_s^t = \frac{s!}{t!(s-t)!}$ .

## 2. Определения, обозначения, постановка задачи

Рассматриваем следующее скалярное линейное однородное трехчленное разностное уравнение степени  $n + 1$ :

$$(1) \quad x_{k+1} - ax_k + bx_{k-n} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

с вещественными коэффициентами  $a, b$ ; его характеристический многочлен имеет вид

$$p(\lambda) = \lambda^{n+1} - a\lambda^n + b.$$

Предполагается, что начальные условия  $x^{(0)} = (x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  имеют единичную норму:  $\|x^{(0)}\|_\infty = 1$ . Такое допущение не ограничивает общности, поскольку решение зависит линейно от  $x^{(0)}$ .

Рассматриваем лишь асимптотически устойчивые уравнения (1), т.е. те, для корней  $\lambda_i$  которых выполнено  $|\lambda_i| < 1$ . Обозначим через  $\mathcal{S}_n \subset \mathbb{R}^2$  область устойчивости уравнения (1) на плоскости коэффициентов; ясно, что оно непусто. Для  $(a, b) \in \mathcal{S}_n$  решения асимптотически стремятся к нулю; интерес представляет исследование поведения решений при конечных значениях  $k$ .

Для данных  $(a, b) \in \mathcal{S}_n$  и данного  $x^{(0)}$ , через

$$\varkappa(a, b, x^{(0)}) = \max_{k \geq 1} |x_k|$$

обозначим максимальное значение решения уравнения (траектории). Там, где это не допускает разночтений, опускаем аргументы у  $\varkappa(a, b, x^{(0)})$ . Говорим, что решение *испытывает всплеск*, если эта величина больше единицы, а соответствующее значение номера итерации  $k^* = \arg \max_k |x_k|$  называем *моментом всплеска*.

Также будем оценивать *область всплеска* – ту часть  $\mathcal{P}_n$  области устойчивости  $\mathcal{S}_n$ , в которой может наблюдаться всплеск хотя бы при каких-то начальных условиях. Области всплеска для некоторых конкретных начальных условий также представляют интерес.

Впервые линеаризованная модель (1) была предложена в [23]; входящие величины имеют следующий физический смысл:  $k$  – год наблюдения за популяцией,  $x_k$  – изменение размера популяции в  $k$ -м году,  $n$  – репродуктивный возраст особей в популяции,  $a$  – коэффициент выживаемости,  $b$  – пополнение популяции за счет рождаемости. Те или иные начальные условия отвечают размерам популяции в  $n$  лет, предшествующих началу наблюдения за популяцией с использованием данной модели.

Устойчивость уравнения соответствует неизменности размера популяции во времени, а всплеск решений означает аномально большой текущий прирост/убыль. И то, и другое нежелательно с точки зрения экологического равновесия.

### 3. Основные результаты

#### 3.1. Области устойчивости и всплеска на плоскости коэффициентов уравнения (1)

На рис. 1 показан вид области устойчивости уравнения (1) на плоскости коэффициентов (см. [16, 18]).

Нетрудно показать, что для значений коэффициентов в *области Кона*  $\mathcal{C} = \{a, b: |a| + |b| < 1\}$  (пунктирная линия) всплеска нет ни при каких начальных условиях. Нас будут интересовать лишь области, составленные из множеств I и II («крылышки»), для каждой точки которых имеем  $|a| + |b| \geq 1$  и такие начальные условия, дающие всплеск, существуют (см. теорему 1 из [15]).

Для площади области всплеска  $\mathcal{P}_n$  имеем простую верхнюю оценку. Действительно, из уравнений границы области  $\mathcal{S}_n$  (см. [16]) видно, что правое

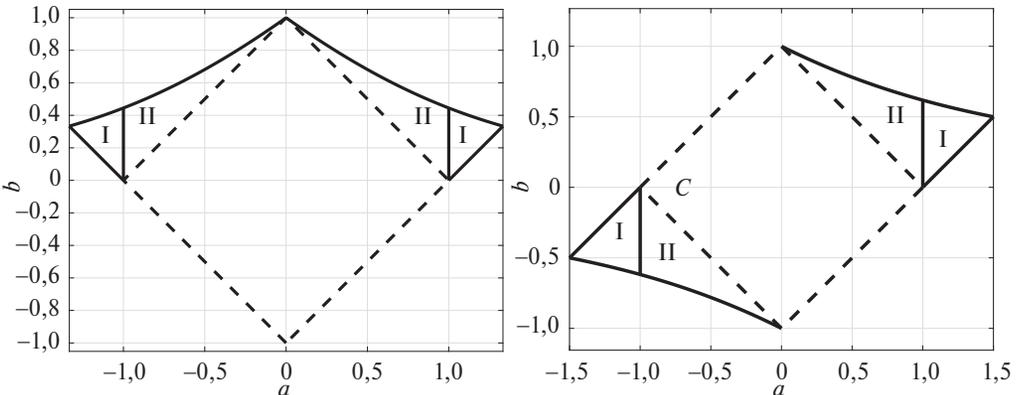


Рис. 1. Область устойчивости  $\mathcal{S}_n$  уравнения (1) для  $n = 3$  (слева) и  $n = 2$  (справа).

крылышко лежит в треугольнике с вершинами  $(0, 1)$ ;  $(1 + 1/n, 1/n)$ ;  $(1, 0)$ ; его площадь равна  $1/n$ , как и площадь левого крылышка, а поскольку  $\mathbf{Vol}(\mathcal{C}) = 2$ , то получаем

$$\mathbf{Vol}(\mathcal{P}_n) < \frac{1}{n+1} \mathbf{Vol}(\mathcal{S}_n)$$

для  $n > 1$  (при  $n = 1$  в оценке выше имеется равенство). В силу симметрии (см. рис. 1) это справедливо и для четных значений  $n$ . Таким образом, для уравнений (1) «вероятность» всплеска убывает с ростом порядка (так, уже при  $n = 7$  имеем  $\mathbf{Vol}(\mathcal{P}_n) \approx 0,08 \times \mathbf{Vol}(\mathcal{S}_n)$ ), но в дальнейшем увидим, что *величина всплеска* может принимать сколь угодно большие значения. Отметим, что для устойчивых уравнений общего вида наблюдается ровно обратная картина: с ростом размерности всплеск становится типичным явлением (см. [15]).

### 3.2. Величина всплеска при «стандартных» начальных условиях

Обратимся к оцениванию *величины* всплеска. При известных степени  $n$ , коэффициентах  $(a, b) \in \mathcal{P}_n$  и начальных условиях  $x^{(0)}$  численное значение решения  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  может быть найдено прямыми вычислениями. Однако желательно иметь *аналитические выражения* для величины всплеска. В общем случае это представляется затруднительным, и ниже будут даны оценки величины и момента всплеска для специальных начальных условий и некоторых классов коэффициентов.

Далее будем изучать поведение решений при «стандартных» начальных условиях

$$(2) \quad x^{(0)} = (0, \dots, 0, 1).$$

**3.2.1. Нижняя оценка.** При  $x^{(0)} = (0, \dots, 0, 1)$  из (1) немедленно получаем, что первые  $n$  итераций  $x_k$  не зависят от  $b$ :

$$(3) \quad x_k = a^k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

т.е. всплеск наблюдается для всех  $(a, b) \in \mathcal{S}_n$ ,  $|a| > 1$ ; иными словами, множества I представляют собой области всплеска при  $x^{(0)} = (0, \dots, 0, 1)$ . Величина всплеска может быть оценена снизу как

$$(4) \quad \varkappa \geq \varkappa_* = |a|^n > 1.$$

Впрочем, нетрудно видеть, что эта оценка может оказаться очень грубой.

*Пример 1.* При  $n = 10$  и  $\varepsilon = 0,001$  рассмотрим пару коэффициентов  $a = \frac{n+1}{n} - \varepsilon = 1,099$  и  $b = \frac{1}{n} = 0,1$ . Имеем  $\varkappa_* = 2,5703$ , в то время как истинное значение величины всплеска, полученное прямыми вычислениями, дает  $\varkappa = 13,0732$ , и оно достигается при  $k = 111 \gg n$ .

**3.2.2. Точная комбинаторная формула.** Итак, для начальных значений  $x^{(0)}$  (2) имеем

$$x_k = a^k := X_{k,0}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Продолжим итерировать по  $k$ . На следующих  $(n + 1)$  шагах величина  $x_k$  зависит также и от коэффициента  $b$ , и прямыми вычислениями получаем

$$\begin{aligned} x_k &= X_{k,0} - C_{k-n}^1 a^{k-(n+1)} b \\ &:= X_{k,0} - X_{k,1} \\ &\quad \text{для } n + 1 \leq k \leq 2(n + 1) - 1, \end{aligned}$$

где зависящий от коэффициента  $b$  член  $C_{k-n}^1 a^{k-(n+1)} b$  обозначен через  $X_{k,1}$ .

На третьем цикле из  $(n + 1)$  итераций решение также зависит и от  $b^2$ :

$$\begin{aligned} x_k &= X_{k,0} - X_{k,1} + C_{k-2n}^2 a^{k-2(n+1)} b^2 \\ &:= X_{k,0} - X_{k,1} + X_{k,2} \\ &\quad \text{для } 2(n + 1) \leq k \leq 3(n + 1) - 1, \end{aligned}$$

где слагаемое  $C_{k-2n}^2 a^{k-2(n+1)} b^2$ , зависящее от  $b^2$ , обозначено через  $X_{k,2}$ .

Продолжая итерировать и собирая вместе полученные выражения, приходим к следующему результату.

*Утверждение 1. Решение  $x_k$  уравнения (1) при начальных условиях (2) имеет вид*

$$(5) \quad x_k = \sum_{j=0}^{\lfloor k/(n+1) \rfloor} (-1)^j C_{k-jn}^j a^{k-j(n+1)} b^j, \quad k = 0, 1, \dots$$

Полученное выражение представляет собой точное решение уравнения (1), (2), однако оно вряд ли может быть полезным для оценки величины и момента всплеска.

**3.2.3. Параметрическое семейство уравнений (1).** Следуя [6], рассмотрим следующее семейство коэффициентов:

$$(6) \quad a = 1 + \frac{\alpha}{n}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad b = a^{n+1} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}},$$

где  $\alpha$  – параметр. В [6] показано, что максимальный по абсолютной величине корень уравнения (1), (6) равен

$$\rho = \frac{an}{n+1} = \frac{n+\alpha}{n+1}$$

и он имеет кратность два.

Из уравнения границы области  $\mathcal{S}_n$  (например, см. теорему 5.3 из [14]) следует, что точка  $(a, b)$  (6) принадлежит множеству I (правое «крылышко»; анализ левого крылышка аналогичен в виду симметрии). На рис. 2 этому параметрическому семейству соответствует точечная кривая.

Анализ поведения решений такого семейства проще по сравнению с общим случаем; в [6] рассматривались специального вида начальные условия,

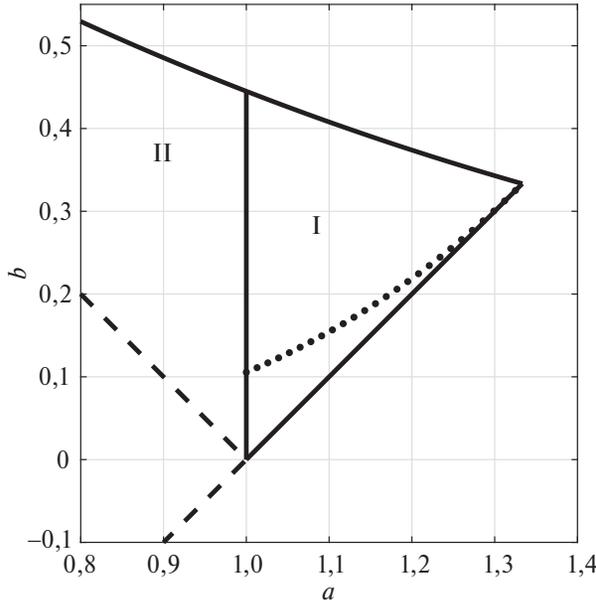


Рис. 2. Параметрическое семейство (6) коэффициентов уравнения (1).

для которых удалось выписать явный вид решения уравнения (1) и получить аналитическое выражение для величины и момента всплеска. Здесь рассмотрим «стандартные» начальные условия (2).

Изучим сперва простейший случай  $n = 1$ , т.е. уравнение второго порядка. Из (6) имеем

$$a = 1 + \alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad b = a^2/4,$$

так что корни характеристического уравнения равны  $\lambda_1 = \lambda_2 = \rho = \frac{a}{2} < 1$ . Для начальных условий  $x_{-1} = 0, x_0 = 1$  немедленно получаем

$$(7) \quad x_k = (k + 1)\rho^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

и величину всплеска легко оценить. Для момента всплеска получаем

$$k^* = \max\{k: x_{k-1} < x_k\}$$

и, дифференцируя по  $k$ , приходим к

$$(8) \quad k^* = \left\lfloor \frac{\rho}{1 - \rho} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right\rfloor.$$

Подставляя  $k = k^*$  в (7), для величины всплеска получаем нижнюю оценку

$$x > \left( \frac{\rho}{1 - \rho} + 1 \right) \rho^{\frac{\rho}{1 - \rho}} > \frac{2}{(1 - \alpha)e}.$$

Таким образом, из последних двух формул следует, что даже для уравнения второго порядка ( $n = 1$ ) и момент, и величина всплеска могут принимать

сколь угодно большие значения при  $\alpha \rightarrow 1$ , т.е. при приближении к границе области устойчивости.

**3.2.4. Еще о консерватизме оценки** (4). Рассмотрим теперь общий случай  $n > 1$ . Как было отмечено выше, на первых  $n$  итерациях решение имеет вид (3). Оно монотонно возрастает при всех допустимых значениях  $a$ , и величина  $\varkappa_* = a^n$  может быть принята в качестве нижней оценки всплеска. Можно показать, что при рассматриваемых начальных условиях  $x^{(0)}$  и  $a, b$  вида (6) решение  $x_k$  унимодально, поэтому величина всплеска равна  $x_n = a^n$  тогда и только тогда, когда  $x_n > x_{n+1} = a^{n+1} - b$ . С учетом выражения для  $b$  (6) получаем, что при

$$1 < \alpha \leq \alpha_1 = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1} - n^n} \approx \frac{1}{e},$$

величина всплеска дается выражением  $\varkappa_1 = (1 + \alpha/n)^n \approx e^\alpha$ , а при  $\alpha > \alpha_1$  всплеск больше.

*Пример 2.* Для  $n = 10$  имеем  $\alpha_1 = 0,3232$ , и  $\varkappa_* = 1,3745$  дает точное значение величины всплеска при всех  $\alpha \leq \alpha_1$ . Однако при  $\alpha = 0,9$  истинное значение всплеска равно  $\varkappa = 7,5965 \gg \varkappa_* = a^n = 2,3674$ , и оно достигается на шаге  $k = 106 \gg n$ . Для сравнения, величина всплеска при (предположительно наихудших) начальных условиях  $x^{(0)} = (-1, \dots, -1, 1)$  равна  $\varkappa = 14,4601$ .

Таким образом, как и для коэффициентов  $a, b$  общего вида, оценка  $\varkappa_*$  всплеска может оказаться очень грубой, если  $\alpha > \alpha_1$ . Ниже будет получена гораздо более точная оценка.

**3.2.5. Аналитическая нижняя оценка.** Имея в виду формулу (7), индукцией по  $n$  получаем следующий результат.

*Утверждение 2.* Для всех  $k \geq 1$  решение семейства (1) с коэффициентами (6) и начальными условиями  $x^{(0)} = (0, \dots, 0, 1)$  ограничено снизу величиной

$$(9) \quad x_k \geq y_k = \frac{2}{n+1}(k+1)\rho^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

При больших  $k$  эта оценка представляет собой асимптотику для решений  $x_k$ .

Момент всплеска  $k_y^{*}$  последовательности  $y_k$  может быть принят за оценку истинного момента всплеска  $k^*$ :

$$(10) \quad k^* \approx k_y^* = \left\lfloor \frac{\rho}{1-\rho} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+\alpha}{1-\alpha} \right\rfloor.$$

Соответственно подставляя правую часть (10) в (9), получаем следующую оценку  $\widehat{\varkappa}_y$  величины всплеска решения  $x_k$ :

$$(11) \quad \varkappa \geq \widehat{\varkappa}_y \approx \frac{2}{(1-\alpha)e} \frac{n+1}{n+\alpha}.$$

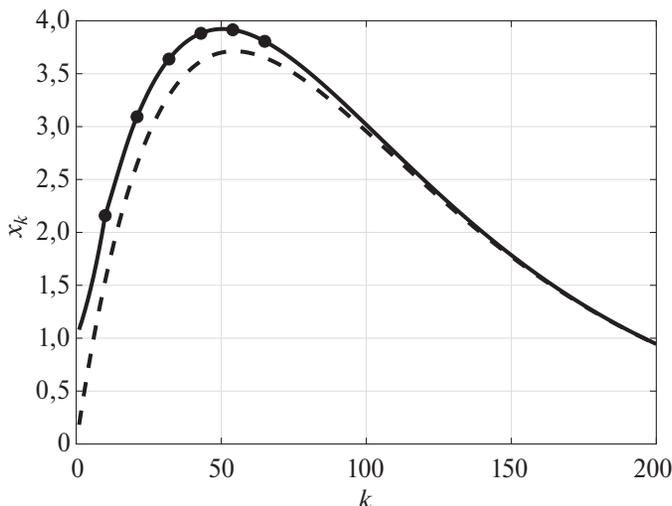


Рис. 3. Истинная траектория  $x_k$  (верхняя кривая) для  $n = 10$ ,  $\alpha = 0,8$ ; значения на концах первых 6 циклов (жирные точки); значения  $y_k$  (нижняя кривая).

Из формул (10) и (11) вытекает интересное наблюдение. Увеличение порядка  $n$  уравнения при фиксированном  $\alpha$  ведет к росту значения момента всплеска, в то время как сама величина всплеска меняется очень мало. С другой стороны, при фиксированном  $n$  увеличение  $\alpha$  влечет рост обеих величин. Это картина отличается от той, которая наблюдается для уравнений общего типа, в которых, как правило, обе эти величины растут с ростом порядка уравнения и приближении коэффициентов к границе области устойчивости (см. результаты в [6]).

*Пример 3.* На рис. 3 верхняя кривая соответствует решению  $x_k$  при  $n = 10$ ,  $\alpha = 0,8$  (также показаны значения на концах циклов длины  $(n + 1)$ , обсуждавшихся в разделе 3.2.2, а нижняя — оценке  $y_k$ .

Истинное значение всплеска равно  $\varkappa = 3,9227$ , и он достигается на шаге  $k^* = 51$ . Оценки (11) и (10) дают  $\hat{\varkappa}_y = 3,7469$  и  $k_y^* = 54$ ; относительная ошибка оценки величины всплеска составляет 4,7%.

При том же значении  $\alpha = 0,8$ , но более высоком порядке уравнения  $n = 20$  получаем примерно то же значение  $\varkappa = 3,9274$  для величины всплеска, но гораздо большее значение  $k^* = 97$  момента всплеска. Наблюдающееся различие с предыдущим случаем объясняется полученными выше выражениями (11) и (10).

С другой стороны, для того же  $n = 10$ , но при гораздо большем значении параметра  $\alpha = 0,95$ , оценки дают  $\hat{\varkappa}_y = 14,7824$  и  $k_y^* = 218$ , в то время как истинное значение всплеска  $x_k$  равно  $\varkappa = 10,7483$ , и он достигается при  $k^* = 153$ . Таким образом, и момент, и величина всплеска выросли значительно. Относительная ошибка оценки составляет чуть более 1%. Результаты представлены на рис. 4.

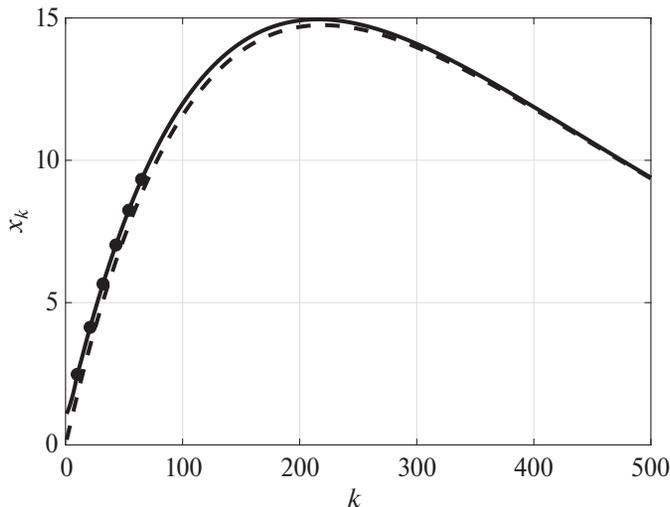


Рис. 4. То же, что на рис. 3, но при  $\alpha = 0,95$ .

Таким образом, точность оценки (9) растет с приближением значения  $\alpha$  к единице, а это как раз тот случай, когда всплеск наблюдается на далеких итерациях  $k$  и применение общей формулы (5) требует определенных усилий.

**3.2.6. Другое параметрическое семейство.** Коротко обсудим еще одно параметрическое семейство уравнений (1), задаваемое соотношениями

$$a = 1 + \frac{1}{n} - \varepsilon, \quad b = \frac{1}{n}$$

с  $0 < \varepsilon < \frac{1}{n}$  и начальными условиями (2). При малых  $\varepsilon$  допустимая точка  $(a, b)$  лежит близко от правого угла области  $\mathcal{S}_n$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  (и фиксированном  $n$ ) величина всплеска неограниченно возрастает (поскольку максимальный по модулю корень уравнения (1) стремится к  $\rho = 1$  и имеет кратность два); это поведение типично и для уравнений общего вида (см. [6]).

Зафиксируем теперь малое значение  $\varepsilon$  и будем увеличивать порядок  $n$  уравнения. В отличие от всех случаев, рассмотренных в [6] (рост величины всплеска) здесь наблюдаем ровно противоположную картину: величина всплеска *уменьшается* до  $a^n$  с ростом  $n$ . Простое объяснение этого явления состоит в том, что точка  $(a, b)$  приближается к точке  $(1, 0)$ , которая принадлежит области  $\mathcal{C}$ , в которой всплеска нет.

**3.2.7. Угловые точки множества  $\mathcal{S}_n$ .** Для некоторых значений коэффициентов  $(a, b) \in \mathcal{S}_n$  удастся получить явный вид решения и проанализировать его поведение. Таковыми являются угловые точки области устойчивости.

Первые «тривиальные» значения:  $a = 0$ ,  $b = \pm 1$  (верхняя и нижняя угловые точки на рис. 1). Так, для  $b = 1$  корни характеристического полинома  $p(\lambda) = \lambda^{n+1} + 1$  есть корни из минус единицы. Они равномерно расположены на окружности единичного радиуса; получаем результат, который немедленно

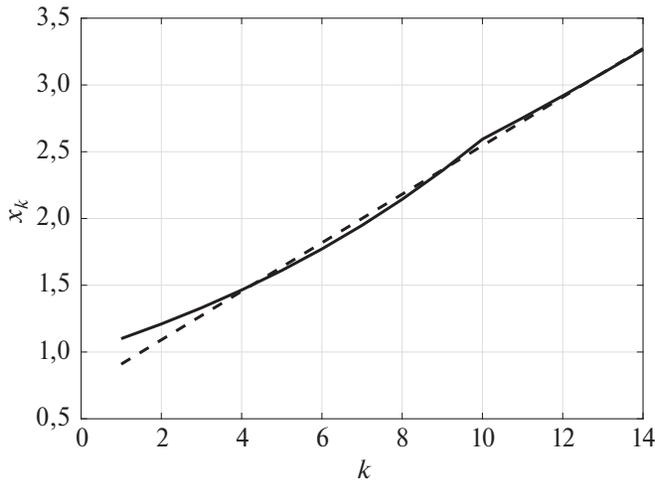


Рис. 5. Решения уравнения (1), (2),  $n = 10$  (сплошная линия) и его асимптотика (пунктир).

но следует из Утверждения 1 или же он может быть получен непосредственными вычислениями.

*Утверждение 3.* При  $a = 0$ ,  $b = 1$  решение (1), (2) имеет вид

$$x_k = \begin{cases} 0 & \text{при } \text{mod}(k, n) \neq 0, \\ (-1)^m & \text{при } \text{mod}(k, n) = 0. \end{cases}$$

В случае  $b = -1$  картина совершенно аналогичная, но ненулевые значения решения равны единице.

Другой, более интересной угловой точкой является  $a = \frac{n+1}{n}$ ,  $b = \frac{1}{n}$  (и ее симметричная  $a = -\frac{n+1}{n}$ ,  $b = \frac{1}{n}$ , см. рис. 1), которая принадлежит параметрическому семейству (6) с  $\alpha = 1$ . В этом случае старший корень равен  $\rho = 1$  и имеет кратность два. В отличие от предыдущего случая, решение  $x_k$  расходится, и из Утверждения 2 следует, что оно растет по крайней мере линейно с ростом  $k$ . Точнее, имеем следующий результат.

*Утверждение 4.* При  $a = 1 + \frac{1}{n}$ ,  $b = \frac{1}{n}$  асимптотика решения уравнения (1), (2) дается следующим выражением:

$$x_k \sim \frac{2(k+1)}{n+1} + \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{2k}{n+1} + \frac{2n+2}{3n+1}.$$

Иллюстрация для  $n = 8$  приведена на рис. 5; видно, что асимптотическая формула весьма точна и для малых значений  $k$ , а само решение очень быстро выходит на асимптотику.

**3.2.8. Иллюстративный пример.** В заключение представим численную иллюстрацию величины всплеска решений уравнения (1) с начальными условиями  $x^{(0)} = (0, \dots, 0, 1)$  при произвольных значениях коэффициентов  $a, b \in \mathcal{P}_n$ .

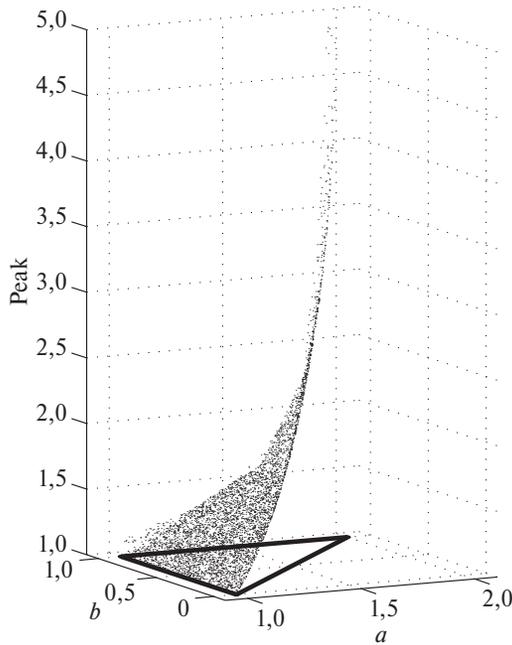


Рис. 6. Область  $\mathcal{P}_1^+$  и величина всплеска в разных ее точках.

В простейшем случае  $n = 1$  областью всплеска уравнения является треугольник  $\mathcal{P}_1^+ = \{1 < a < 2, a - 1 < b < 1\}$  на плоскости коэффициентов и симметричный ему треугольник  $\mathcal{P}_1^- = \{-2 < a < 1, a + 1 < b < 1\}$ . Как показано выше, всплеск наблюдается для всех точек из  $\mathcal{P}_1^+$  и  $\mathcal{P}_1^-$ , и его минимальное значение равно  $a$ .

Проведен следующий эксперимент. Случайным образом в области  $\mathcal{P}_1^+$  было сгенерировано  $N = 10\,000$  точек, и для каждого уравнения с коэффициентами, определяемыми координатами соответствующей точки, численно подсчитана величина всплеска. Рисунок 6 изображает область  $\mathcal{P}_1^+$  (треугольник) и значения всплеска решений соответствующих уравнений. Видим, что область больших значений всплеска невелика, и, согласно аналогичным экспериментам, ее доля уменьшается с ростом порядка  $n$ . Однако в соответствии с представленными выше результатами, *величина всплеска* может принимать сколь угодно большие значения для коэффициентов, близких к границе области  $\mathcal{P}_n^+$ .

#### 4. Заключение

В статье исследованы эффекты всплеска решений известного из литературы трехчленного разностного уравнения, имеющего прозрачное практическое происхождение. Показано, что всплеск неизбежен, если коэффициенты принадлежат определенным подмножествам области устойчивости; также показано, что момент и величина всплеска могут принимать произвольно большие

значения. Для некоторых специальных значений коэффициентов и начальных условий получены точные выражения для величины и момента всплеска или аналитические нижние оценки.

Дальнейшие исследования включают в себя анализ неасимптотического поведения решений других семейств  $(a, b) \in \mathcal{P}_n$ , в частности  $\varepsilon$ -параметризованного семейства из раздела 3.2.6, а также иных специальных уравнений, например тех, которые рассмотрены в [17]. Заслуживает внимания получение верхних оценок.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования // Под ред. д-ра техн. наук, проф. В.В. Солодовникова. Кн. 2. Анализ и синтез линейных непрерывных и дискретных систем автоматического регулирования. М.: Машиностроение, 1967.
2. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986.
3. *Danilova M., Kulakova A., Polyak B.* Non-monotone Behavior of the Heavy Ball Method / In: Bohner M., Siegmund S., Simon Hilscher R., Stehlik P. (eds) Difference Equations and Discrete Dynamical Systems with Applications. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, V. 312. Springer, 2020. P. 213–230 (Proc. 24th International Conference on Difference Equations and Applications. Dresden, Germany, May, 2018).
4. *Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В., Щербakov П.С., Смирнов Г.В.* Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // *АиТ.* 2015. № 6. С. 18–41.  
*Polyak B.T., Tremba A.A., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S., Smirnov G.V.* Large Deviations in Linear Control Systems with Nonzero Initial Conditions // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 76. No. 6. P. 957–976.
5. *Polyak B.T., Smirnov G.* Large Deviations for Non-zero Initial Conditions in Linear Systems // *Automatica.* 2016. V. 74. No. 12. P. 297–307.
6. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S., Smirnov G.* Peak Effects in Stable Linear Difference Equations // *J. Difference Eqs. Appl.* 2018. V. 24. No. 9. P. 1488–1502.
7. *Поляк Б.Т., Смирнов Г.В.* Переходные процессы в матричных дискретных линейных системах // *АиТ.* 2019. № 9. С. 112–121.  
*Polyak B.T., Smirnov G.V.* Transient Response in Matrix Discrete-Time Linear Systems // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 9. P. 1645–1652.
8. *Shcherbakov P., Dabbene F., Polyak B.* Solutions of Stable Difference Equations Probably Experience Peak // *IFAC-PapersOnLine.* 2020. V. 53. No. 2. P. 4762–4767 (Proc. World Congress of IFAC, Jul 11-17, 2020, Berlin).
9. *Измайлов Р.Н.* Эффект «всплеска» в стационарных линейных системах со скалярными входами и выходами // *АиТ.* 1987. № 8. С. 56–62.  
*Izmailov R.N.* The Peak Effect in Stationary Linear Systems with Scalar Inputs and Outputs // *Autom. Remote Control.* 1987. V. 48 No. 8. P. 1018–1024.
10. *Коган М.М., Кривдина Л.Н.* Синтез многоцелевых линейных законов управления дискретными объектами при интегральных и фазовых ограничениях // *АиТ.* 2011. № 7. С. 83–95.

*Kogan M.M., Krivdina L.N.* Synthesis of Multipurpose Linear Control Laws of Discrete Objects under Integral and Phase Constraints // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 7. P. 1427–1439.

11. *Агиевич В.Н., Парсегов С.Э., Щербakov П.С.* Верхние оценки всплеска в линейных дискретных системах // АиТ. 2018. № 11. С. 32–46.  
*Ahiyevich U.M., Parsegov S.E., Shcherbakov P.S.* Upper Bounds on Peaks in Discrete-Time Linear Systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 11. P. 1976–1988.
12. *Delyon B., Izmailov R., Juditsky A.* The Projection Algorithm and Delay of Peaking in Adaptive Control // IEEE Trans. Autom. Control. 1993. V. 38. No. 4. P. 581–584.
13. *Kozyakin V.S., Kuznetsov N.A., Pokrovskii A.V.* Transients in Quasi-controllable Systems. Overshooting, Stability and Instability // IFAC Proceedings Volumes. 1993. V. 26. No. 4. P. 871–874.
14. *Elaydi S.* An Introduction to Difference Equations. New York: Springer, 2005.
15. *Shcherbakov P., Dabbene F.* A Probabilistic Point of View on Peak Effects in Linear Difference Equations // Eur. J. Control. 2022. V. 63. P. 107–115.
16. *Kuruklis S.* The Asymptotic Stability of  $x_{n+1} - ax_n + bx_{n-k} = 0$  // J. Math. Anal. Appl. 1994. V. 188. P. 719–731.
17. *Dannan F.* The Asymptotic Stability of  $x(n+k) + ax(n) + bx(n-l) = 0$  // J. Difference Eqs. Appl. 2004. V. 10. No. 6. P. 589–599.
18. *Кипнис М.М., Нигматуллин М.* Устойчивость трехчленных линейных разностных уравнений с двумя запаздываниями // АиТ. 2004. № 11. С. 25–39.  
*Kipnis M.M., Nigmatullin M.* Stability of the Trinomial Linear Difference Equations with Two Delays // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 11. P. 1710–1723.
19. *Čermák J., Jániský J.* Stability Switches in Linear Delay Difference Equations // Appl. Math. Comput. 2014. V. 243. P. 755–766.
20. *Kipnis M., Komissarova D.* Stability of a Delay Difference System // Advances in Difference Equations. 2006. Article ID 31409.  
<https://doi.org/10.1155/ADE/2006/31409>, 2006.
21. *Matsunaga H.* Exact Stability Criteria for Delay Differential and Difference Equations // Applied Math. Lett. 2007. V. 20. No. 2. P. 183–188.
22. *Patade J., Bhalekar S.* Analytical Solution of Pantograph Equation with Incommensurate Delay // Phys. Scie. Rev. 2017. V. 2. Issue 9, id. 5103.  
<https://doi.org/10.1515/psr-2016-5103>.
23. *Clark C.W.* A Delay-Recruitment Model, with an Application to Baleen Whale Population // J. Math. Biol. 1976. V. 3. P. 381–391.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.*

Поступила в редакцию 25.01.2024

После доработки 12.03.2024

Принята к публикации 20.03.2024